

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapă Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2022****CLASA a X-a**

**Problema 1.** Determinați  $x \in \left(0, \frac{3}{4}\right)$  pentru care:

$$\log_x(1-x) + \log_2 \frac{1-x}{x} = \frac{1}{(\log_2 x)^2}.$$

**Problema 2.** Fie  $z_1, z_2, z_3$  numere complexe de modul 1, cu proprietatea că

$$|z_i - z_j| \geq \sqrt{2}, \text{ pentru orice } i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j.$$

Demonstrați că  $|z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1| \leq 3$ .

*Gazeta Matematică*

**Problema 3.** Un număr natural  $n \geq 4$  se numește *interesant* dacă există cel puțin un număr complex  $z$  de modul 1 pentru care  $1 + z + z^2 + z^{n-1} + z^n = 0$ .  
Determinați câte numere interesante sunt cel mult egale cu 2022.

**Problema 4.** Determinați funcțiile  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  care verifică relația

$$f(f(y-x) - xf(y)) + f(x) = y \cdot (1 - f(x)), \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

*Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări.  
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*