



CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ - 11 martie 2023
Secțiunea H2

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică: profilul Real – specializarea Științe ale Naturii

Clasa a XI-a

Subiectul 1.

Se considera matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $X(a) = I_2 + aA$, $a \in \mathbb{R}$.

- Arătați că $X(a)X(b) = X(ab + a + b)$, $(\forall) a, b \in \mathbb{R}$ și determinați perechile de numere întregi (a, b) astfel încât $X(a)X(b) = I_2$.
- Aflați numărul real a astfel încât $\det(X(a)X(-a)) \geq 3a + 3$.
- Aflați matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât are loc relația $X \cdot X(I) = A$.

Subiectul 2.

Fie funcția $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \ln(x+1) - \ln(x-1)$.

- Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f .
- Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} x(f(x) - 2x)$.
- Arătați că ecuația $f(x+2) = f(x)$ are cel puțin o soluție în intervalul $(1, \infty)$.

Subiectul 3.

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea că $|f(x) - x| \leq x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Calculați $f(0)$.
- Demonstrați că funcția f este continuă în $x_0 = 0$.

Subiectul 4.

Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ care apare afișată pe monitorul unui calculator.

- Printr-un program, la un prim pas, matricea A este înlocuită pe monitorul calculatorului cu pătratul ei. Procesul se repetă și la pasul doi apare afișat A^3 , la pasul următor apare A^4 și se reia procesul de atâtea ori de câte ori a fost comandat de către programator. Aflați câți pași trebuie să comande programatorul pentru ca pe monitor să apară la final o matrice cu suma tuturor elementelor egală cu 1025.
- Printr-un nou program, la primul pas, elementele unei linii oarecare ale matricei A sunt mărite cu 1 și noua matrice obținută în acest mod înlocuiește matricea A afișată inițial pe monitorul calculatorului. Procesul se repetă în mod automat cu elementele unei linii oarecare, aceeași sau oricare din celelalte două, din noua matrice afișată pe monitor și se reia de atâtea ori de câte ori a fost programat. Aflați câți pași trebuie să comande programatorul pentru ca pe monitor să apară la final o matrice cu suma tuturor elementelor egală cu 1025.

Notă: Timp de lucru 3 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.