

**Olimpiada Națională de Matematică****Etapă Județeană/a Sectoarelor Municipiului București, 2023****CLASA a X-a**

Problema 1. Determinați toate soluțiile reale ale ecuației

$$2^{x-1} + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 3.$$

Supliment Gazeta Matematică

Problema 2. Pe arcul mic AB al cercului circumscris triunghiului echilateral ABC se consideră punctul N astfel încât măsura arcului NB este 30° . Din punctul N se duc perpendiculare pe latura AC , respectiv AB . Acestea intersectează a doua oară cercul circumscris triunghiului ABC în punctele M , respectiv I .

a) Demonstrați că triunghiul IMN este echilateral.

b) Dacă H_1, H_2 și H_3 reprezintă ortocentrele triunghiurilor NAB , IBC , respectiv CAM , demonstrați că triunghiul $H_1H_2H_3$ este echilateral.

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Determinați toate numerele $z \in \mathbb{C}$ pentru care:

$$|z^{n+1} - z^n| \geq |z^{n+1} - 1| + |z^{n+1} - z|.$$

Problema 4. Determinați toate funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care:

$$f(xf(x) + f(y)) = f(f(x^2)) + y,$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

*Timp de lucru 3 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*