

EXAMENUL NAȚIONAL PENTRU DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR  
iulie 2022

Probă scrisă  
MATEMATICĂ

Model

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de patru ore.

SUBIECTUL I

(60 de puncte)

1. Se consideră  $x_1$  și  $x_2$  soluțiile ecuației  $x^2 + x + m = 0$ , unde  $m$  este număr real nenul.
- 7p a) Arătați că, dacă una dintre soluțiile ecuației este număr întreg, atunci numărul  $m$  este întreg, divizibil cu 2.
- 8p b) Determinați numărul real nenul  $m$  pentru care  $\frac{x_1^2 + 1}{x_1^3 + x_1^2} + \frac{x_2^2 + 1}{x_2^3 + x_2^2} = -\frac{1}{4}$ .
2. Se consideră triunghiul  $ABC$  și semidreapta  $AD$ , bisectoarea unghiului  $BAC$ ,  $D \in BC$ . Punctul  $M$  este mijlocul segmentului  $AD$ , iar punctele  $N$  și  $P$  sunt proiecțiile punctului  $M$  pe dreptele  $AB$ , respectiv  $AC$ .
- 7p a) Arătați că segmentele  $AN$  și  $AP$  sunt congruente.
- 8p b) Demonstrați că, dacă  $AC = 3AN$ , atunci triunghiul  $CDN$  este isoscel.
3. Se consideră matricele  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  cu  $\det A = 1$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$  și  $M(z) = A + zB$ , unde  $z$  este număr complex.
- 7p a) Arătați că  $\det(M(z) + M(-z)) = 8$ , pentru orice număr complex  $z$ .
- 8p b) Demonstrați că, dacă  $\det(M(1)) = \det(M(2))$ , atunci  $\det(M(z)) = 1$ , pentru orice număr complex  $z$ .
4. Se consideră funcția  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{x^3 + 2}$ .
- 7p a) Arătați că funcția  $f$  este strict descrescătoare pe  $(1, +\infty)$ .
- 8p b) Demonstrați că  $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{1}{18}$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

Următoarea secvență face parte din programa școlară de matematică pentru clasa a VIII-a.

Competențe specifice și exemple de activități de învățare

Clasa a VIII-a
<b>1.3. Identificarea unor dependențe funcționale în diferite situații date</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- Completarea unui șir numeric când regula de construire este dată explicit</li><li>- Determinarea unei reguli de construire a unui șir când se cunosc câțiva termeni</li><li>- Identificarea unor dependențe funcționale în diferite situații concrete</li><li>- Exprimarea unor dependențe funcționale în diverse forme (tabele, grafice, formule)</li></ul>
<b>2.3. Descrierea unei dependențe funcționale într-o situație dată, folosind diagrame, tabele sau formule</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- Determinarea elementelor unei funcții (domeniu de definiție, mulțimea în care funcția ia valori, lege de corespondență)</li></ul>

<ul style="list-style-type: none"> <li>- Corelarea elementelor unor funcții cu situații practice</li> <li>- Sortarea și organizarea unor date după criterii de tip dependență funcțională</li> </ul>
<b>3.3. Reprezentarea în diverse moduri a unor funcții cu scopul caracterizării acestora</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Reprezentarea grafică a unor funcții numerice</li> <li>- Determinarea unor puncte care aparțin graficului unei funcții numerice</li> <li>- Determinarea intersecțiilor graficului unei funcții numerice cu axele de coordonate</li> <li>- Determinarea indicatorilor tendinței centrale a unui set de date</li> </ul>
<b>4.3. Utilizarea unui limbaj specific pentru formularea unor opinii referitoare la diferite dependențe funcționale</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Formularea unor presupuneri matematice despre o funcție/despre regula de construire a unui șir</li> <li>- Utilizarea unor exemple sau contraexemple pentru a susține un argument în contextul funcțiilor</li> <li>- Utilizarea unui limbaj specific pentru a interpreta un grafic sau o dependență funcțională</li> <li>- Ilustrarea grafică a indicatorilor tendinței centrale a unui set de date</li> </ul>
<b>5.3. Analizarea unor funcții în context intra și interdisciplinar</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Determinarea coordonatelor punctului de intersecție a graficelor a două funcții și interpretarea acestora ca soluție a unui sistem de două ecuații de gradul I cu două necunoscute</li> <li>- Determinarea unei funcții care îndeplinește condiții date</li> <li>- Verificarea coliniarității a trei sau a mai multor puncte, cunoscând coordonatele lor</li> </ul>
<b>6.3. Modelarea cu ajutorul funcțiilor a unor fenomene din viața reală</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Rezolvarea unor probleme din cotidian cu ajutorul funcțiilor</li> <li>- Interpretarea unor fenomene din cotidian descrise cu ajutorul funcțiilor</li> <li>- Interpretarea unei reprezentări grafice a indicatorilor tendinței centrale a unui set de date</li> </ul>

[...]

Domeniu de conținut	Conținuturi
<b>Funcții.</b> <b>Organizarea datelor și probabilități</b>	<b>3. FUNCȚII</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Funcții definite pe mulțimi finite, exprimate cu ajutorul unor diagrame, tabele, formule; graficul unei funcții, reprezentarea geometrică a graficului unor funcții numerice</li> <li>• Funcții de forma <math>f: D \rightarrow \mathbb{R}</math>, <math>f(x) = ax + b</math>, unde <math>a</math> și <math>b</math> sunt numere reale și <math>D</math> este o mulțime finită de numere reale sau un interval nede generat; interpretare geometrică; lecturi grafice</li> <li>• Elemente de statistică: indicatorii tendinței centrale (frecvență, medie, mediană, mod și amplitudine a unui set de date)</li> </ul>

**Notă:** Conținuturile vor fi abordate din perspectiva competențelor specifice. Activitățile de învățare sugerate oferă o imagine posibilă privind contextele de formare/dezvoltare a acestor competențe.

(Programa școlară pentru disciplina Matematică, OMEN nr. 3393/28.02.2017)

Pentru o evaluare la finalul unității de învățare „Funcții”, a trei dintre competențele specifice precizate în secvența de mai sus, elaborați trei itemi: un item de tip alegere multiplă, un item de tip întrebare structurată și un item de tip rezolvare de probleme.

În elaborarea itemilor se vor avea în vedere următoarele aspecte:

- menționarea competenței specifice evaluate;
- respectarea formatului fiecărui item elaborat;
- elaborarea răspunsului așteptat (baremul de evaluare) pentru fiecare dintre itemii elaborați;
- corectitudinea științifică a informației de specialitate.